

Crecimiento endógeno: Lo que importa son las nuevas ideas

Felix Wellschmied

Universidad Carlos III de Madrid

Crecimiento Económico

Por qué necesitamos comprender la fuente del progreso tecnológico:

- El crecimiento tecnológico es el motor del crecimiento en el modelo de Solow.
- Las diferencias en tecnología entre países son clave para comprender las diferencias en la producción por trabajador.
- Los milagros del crecimiento son el resultado en parte del rápido crecimiento tecnológico.

- [Romer \(1990\)](#) presenta un marco sobre cómo analizar el crecimiento tecnológico a través de la investigación. Por ese trabajo, ganó el [Premio Nobel](#).
- Es un modelo para el crecimiento en la frontera tecnológica a través del descubrimiento de nuevas innovaciones.
- Después, consideraremos cómo los países que se quedan atrás pueden crecer copiando ideas existentes.

Cómo se descubren las ideas

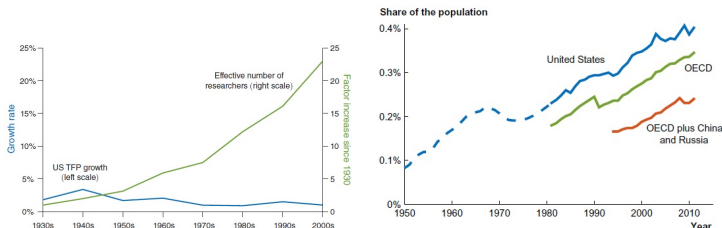
$$\dot{A}(t) = f\left(\theta, L_A(t), A(t)\right). \quad (1)$$

- θ es el entorno de investigación. Esto incluye la calidad de las instituciones de *I&D* y las instituciones que llevan esas ideas al mercado.
- $L_A(t)$ es el número de investigadores.
- El stock actual de ideas, $A(t)$, también puede influir en cuántas nuevas ideas se descubren.

Dos puntos de vista contrapuestos:

- De pie sobre los hombros de gigantes: A medida que los grandes innovadores que nos precedieron han tenido grandes ideas, se vuelve más fácil desarrollar nuevas ideas. Por ejemplo, habría sido imposible viajar a la Luna, si Newton y Leibniz no hubieran inventado el cálculo.
- Las frutas más fáciles ya están recogidas: Imagina que hay muchas ideas nuevas por ahí, pero descubrir cada una contiene un grado variable de dificultad. Por ejemplo, en medicina, el hecho de que los médicos se laven las manos conduce a una disminución drástica de la mortalidad, pero descubrir nuevos tratamientos contra el cáncer ha resultado difícil. Naturalmente, comenzaremos descubriendo primero ideas fáciles.

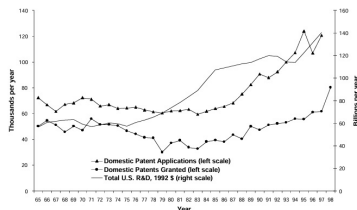
Entrada y salida de I&D en los datos



Source: [Bloom et al. \(2020\)](#) and [Jones \(2016\)](#)

- Con el tiempo, el ritmo de innovación, es decir, el progreso tecnológico, es casi constante.
- Sin embargo, hemos aumentado el número de insumos, es decir, el número de trabajadores de I&D.
- Esto sugiere que el stock de ideas existentes ralentiza la tasa de crecimiento de nuevas ideas.

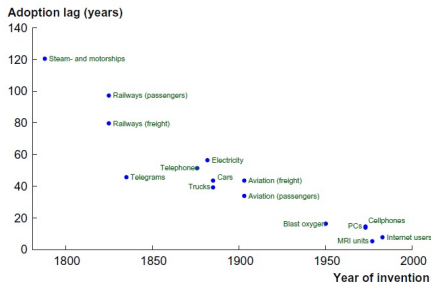
Caída de la productividad de la producción de I&D



Source: [Jaffe \(1999\)](#)

- A pesar de que el número de investigadores aumenta exponencialmente en los EE. UU., el número de nuevas patentes es casi plano y el aumento desde 1980.
- Pero ni siquiera eso aumentó el crecimiento de la productividad, lo que sugiere que las innovaciones se vuelven más marginales.

Rapidez de adopción



Source: [Jones \(2016\)](#)

- Una vez que se desarrolla una nueva idea, todavía debe ser adoptada por la economía.
- Los datos sugieren que hoy en día somos más rápidos en la adopción de nuevas ideas que en el pasado.

- Bloom et al. (2020) estudian tres casos en los que pueden observar la entrada y la salida en la función de producción de ideas.
- Esto les permite estudiar los cambios en la productividad de la investigación dentro de un campo a lo largo del tiempo.
- Encuentran que la productividad de la investigación está cayendo alrededor de un 8% por año.

Ley de Moore

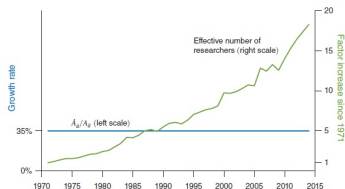
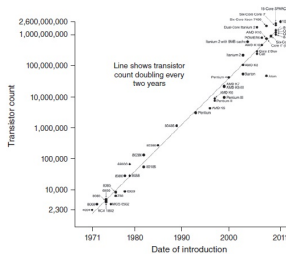
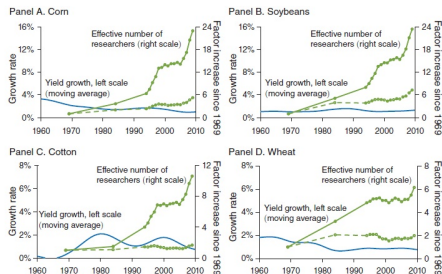


FIGURE 4. DATA ON MOORE'S LAW

Source: [Bloom et al. \(2020\)](#)

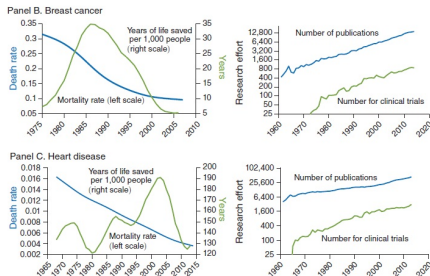
- Desde la década de 1970, el número de transistores en una CPU se duplica cada 2 años, lo que implica un rendimiento anual de investigación del 35%.
- Utilizando los datos de investigación y desarrollo y salarios de los principales fabricantes de chips, hoy necesitamos 18 veces más insumos para el mismo crecimiento que en la década de 1970.

Rendimiento de los cultivos



Source: [Bloom et al. \(2020\)](#)

- El aumento de los rendimientos de los cultivos fue relativamente constante desde el decenio de 1960.
- Al mismo tiempo, el número de investigadores que intentan aumentar el rendimiento de los cultivos ha aumentado considerablemente.
- Los datos sugieren una disminución anual de la productividad del 6%.



Source: [Bloom et al. \(2020\)](#)

- Las mejoras en los resultados de salud no muestran un crecimiento exponencial.
- Sin embargo, el número de investigadores, de nuevo, ha aumentado drásticamente.

El modelo

¿Necesitamos un nuevo marco? Bienes no rivales

Puede ser tentador pensar en la tecnología como un insumo más que podemos acumular (como el capital) y simplemente modificar nuestro modelo de Solow. Esto, sin embargo, pasa por alto un aspecto clave de la tecnología: a diferencia del capital, la tecnología es un **biene no rival**. Si a una persona se le ocurre una mejor idea de producir, todos podrían, en principio, usar esa idea:

- Un algoritmo informático recién descubierto podría ser utilizado por todos los productores / consumidores.
- Un medicamento recién descubierto podría beneficiar a todas las personas enfermas.
- La entrega justo a tiempo podría ser empleada por todas las empresas.
- Un diseño de avión más eficiente podría ser utilizado por todas las empresas.

¿Necesitamos un nuevo marco? Rendimientos crecientes a escala

La no rivalidad a menudo conduce a rendimientos crecientes a escala:

- La producción de la primera unidad es costosa, ya que se necesita invertir una gran cantidad de investigación y desarrollo.
- Una vez que se descubre la nueva idea, la producción de más unidades tiene un costo marginal relativamente barato (a veces cero).
Por ejemplo:

$$f(x) = 100(x - F). \quad (2)$$

- Por lo tanto, $f(ax) > af(x)$, es decir, tenemos rendimientos crecientes a escala.

¿Necesitamos un nuevo marco? Competencia imperfecta

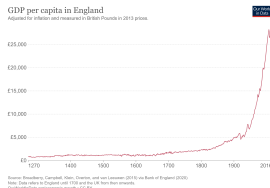
Con rendimientos crecientes a escala, los mercados suelen dar lugar a una competencia imperfecta:

- Los costos promedio son siempre más altos que los costos marginales. Por lo tanto, $p = MC$ daría lugar a beneficios negativos y a que ninguna empresa entrara en el mercado.
- En cambio, las empresas imperfectamente competitivas necesitan obtener ganancias por cada unidad de producción para recuperar los grandes costos fijos.
- Esto requiere que el bien sea excluible. De lo contrario, el gobierno tendrá que hacer las innovaciones, por ejemplo, las innovaciones en defensa nacional.

¿Cómo pueden las empresas obtener beneficios de sus innovaciones?

- Algunas ideas nuevas pueden ser difíciles de copiar. Por ejemplo, la receta de Coca Cola fue un secreto comercial durante mucho tiempo. Además, las innovaciones en la organización de las empresas, como los nuevos estilos de gestión, pueden ser difíciles de observar y de copiar de una empresa a otra.
- En otros casos, por ejemplo, los nuevos medicamentos, la ingeniería inversa y la copia pueden ser relativamente simples. Sin embargo, para incentivar a las empresas y a los particulares a innovar, el gobierno concede monopolios temporales a las innovaciones:
 - Patentes para ideas tangibles.
 - Derechos de autor para ideas no tangibles.

¿Puede el patentamiento explicar el despegue del crecimiento?



- Recordemos que no observamos un crecimiento de la producción por trabajador desde hace relativamente poco tiempo.
- Inglaterra estableció una ley de patentes en 1624, pero la difusión fue lenta.
- Algunos economistas creen que la difusión de la protección de la propiedad intelectual fue uno de los principales factores que contribuyeron a la revolución industrial.

El modelo Romer

Romer (1990) propone un modelo en el que las nuevas ideas se suman al acervo de ideas existente. Conceptualmente, lo más sencillo es tener un modelo con cuatro sectores diferentes:

- El sector de los hogares ahorra y acumula el stock de capital agregado y homogéneo.
- Los investigadores desarrollan nuevos diseños de productos que adoptan la forma de bienes de capital, por ejemplo, el diseño de un nuevo ordenador.
- Una empresa intermediaria compra este diseño y utiliza el capital del sector doméstico para convertirlo en un bien de capital productivo sobre el que posee una patente.
- Finalmente, un gran número de productores de bienes finales compran estos bienes de capital y producen el bien final bajo competencia perfecta.

Producción de bienes finales

Para producir el bien final, necesitamos bienes de capital diferenciados.
Por ejemplo, una economía requiere:

- líneas de ensamblaje
- brazos robóticos
- máquinas de estampado
- herramientas de soldadura
- chasis de automóviles
- motores de combustión

El productor de bienes finales utiliza mano de obra y una medida de $A(t)$ bienes de capital disponibles para producir el producto final del bien:

$$Y(t) = L_Y(t)^{1-\alpha} \int_0^{A(t)} x_j(t)^\alpha dj. \quad (3)$$

Tenga en cuenta que la función tiene rendimientos constantes a escala con respecto al capital y la mano de obra. Para una cantidad dada de bienes de capital, A , duplicando L_Y y cada x_j duplicará la producción.

Demanda óptima de insumos

Dado el salario, w , y los precios de cada bien de capital, p_j , el productor de bienes finales elige la cantidad de cada bien de capital y el mano de obra para maximizar las ganancias (el precio del bien de producción final es 1, y omitiendo los índices de tiempo):

$$\max_{L_Y, x_j} \left\{ \Pi = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^\alpha dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj \right\}. \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L_Y} = (1 - \alpha) L_Y^{-\alpha} \int_0^A x_j^\alpha dj - w = 0 \quad (5)$$

$$w = (1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} - p_j = 0 \quad (7)$$

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}. \quad (8)$$

Productores de bienes de capital

Los productores de bienes de capital compran diseños de patentes a los investigadores a un precio fijo P_A . Una vez que tienen el diseño, producen bienes de capital transformando el capital del sector doméstico en bienes de capital productivos a una tasa de uno a uno. El precio del capital es de r :

$$\max_{x_j} \{ \pi_j = p_j(x_j)x_j - rx_j \}, \quad (9)$$

donde $p_j(x_j)$ viene dado por la función demand (8).

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j(x_j)}{\partial x_j} x_j + p_j - r = 0 \quad (10)$$

$$0 = \frac{\frac{\partial p_j(x_j)}{\partial x_j} x_j}{p_j} + 1 - \frac{r}{p_j}. \quad (11)$$

De (8) tenemos

$$\frac{\frac{\partial p_j}{\partial x_j} x_j}{p_j} = \frac{(\alpha - 1) \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-2} x_j}{\alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}} \quad (12)$$

$$= \alpha - 1. \quad (13)$$

Juntando las cosas:

$$p_j = \frac{1}{\alpha} r > r. \quad (14)$$

La competencia imperfecta implica que los productores de bienes de capital obtienen un beneficio por cada unidad que venden:

$$\pi_j = \frac{1}{\alpha} r x_j - r x_j = x_j r \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \quad (15)$$

El valor de una patente

El costo implícito de tener una patente durante un período es su precio multiplicado por el rendimiento de un período de una inversión alternativa: rP_A . Su beneficio de un período es el beneficio del flujo más el cambio en el valor de la patente durante ese período:

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A. \quad (16)$$

Se puede demostrar que esto resuelve

$$P_A = \frac{\pi}{r - n}. \quad (17)$$

El sector de investigación

El número de ideas que un investigador individual descubre en un período depende de:

- Su productividad, θ , es decir, el entorno de investigación en una economía.
- *Apoyándose en los hombros de gigantes* sugiere que el stock actual de ideas tiene un efecto positivo: $A(t)^\phi$ con $\phi > 0$.
- El número de investigadores en total. Si $\lambda < 1$, hay un efecto de pisarse los pies, de lo contrario, hay efectos de red.

$$\bar{\theta} = \theta A(t)^\phi L_A(t)^{\lambda-1}. \quad (18)$$

Para llegar al cambio total en el número de nuevas ideas en una economía, debemos multiplicar por el número de investigadores, L_A :

$$\dot{A}(t) = \theta L_A(t)^\lambda A(t)^\phi. \quad (19)$$

El número de investigadores

Para un investigador individual, el valor de ser investigador es $\bar{\theta}P_A$. Esto tiene que igualar el salario que ha dejado de pagar por ser trabajadora de producción:

$$\bar{\theta}P_A = (1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y} \quad (20)$$

En el estado estacionario, se puede demostrar que esto resuelve

$$s_R = \frac{1}{1 + \frac{r-n}{\alpha g^*}}. \quad (21)$$

- Un crecimiento tecnológico más eficiente alentará a más investigadores.
- Una tasa de ahorro más alta disminuirá el r y aumentará la investigación.

Como cada bien de capital x_j tiene el mismo costo y el mismo beneficio, el resultado de equilibrio es que todos se producen en la misma cantidad:

$$x_j = x. \quad (22)$$

Sea $K(t)$ la oferta total de capital en la economía. Entonces, el equilibrio en el mercado de bienes de capital implica:

$$\int_0^A x_j dj = Ax = K \quad (23)$$

$$x = \frac{K}{A}. \quad (24)$$

La función de producción agregada

Sustituyendo el resultado en nuestra función de producción de bienes finales, obtenemos:

$$Y(t) = L_Y(t)^{1-\alpha} A(t) x(t)^\alpha \quad (25)$$

$$Y(t) = L_Y(t)^{1-\alpha} A(t) \left(\frac{K(t)}{A(t)} \right)^\alpha \quad (26)$$

$$Y(t) = (A(t) L_Y(t))^{1-\alpha} K(t)^\alpha \quad (27)$$

La razón por la cual una mayor cantidad de bienes de capital hace que la economía sea más productiva es que permite escapar de los rendimientos marginales decrecientes. Como resultado, la función presenta rendimientos crecientes a escala con respecto a los *tres* factores de producción.

$$r(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha (A(t) L_Y(t))^{1-\alpha} K(t)^{\alpha-1} \quad (28)$$

$$= \alpha \frac{Y(t)}{K(t)}. \quad (29)$$

El hogar trabaja ya sea en el sector productor de bienes, L_Y , o en el sector de investigación, L_A :

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t) \quad (30)$$

$$L_A(t) = s_R L(t) \quad (31)$$

$$\dot{L}(t) = nL(t). \quad (32)$$

Ingresos del sector hogares

El hogar es el propietario del stock de capital y obtiene ingresos, $\tilde{Y}(t)$, por alquilar el capital, trabajar en el sector de investigación o trabajar en el sector de producción de bienes finales:

$$\tilde{Y}(t) = r(t)K(t) + \int \pi_j(t) dj + L_Y(t)w(t), \quad (33)$$

donde he utilizado el hecho de que los ingresos por ser investigador deben ser iguales a las ganancias totales de los productores de capital.
Sustituyendo las ganancias y el salario se obtiene:

$$\tilde{Y}(t) = r(t)K(t) + \int x_j(t)r(t)\frac{1-\alpha}{\alpha} dj + (1-\alpha)Y(t) \quad (34)$$

$$\tilde{Y}(t) = r(t)K(t) + K(t)r(t)\frac{1-\alpha}{\alpha} + (1-\alpha)Y(t) \quad (35)$$

$$\tilde{Y}(t) = \frac{r(t)}{\alpha}K(t) + (1-\alpha)Y(t) \quad (36)$$

$$\tilde{Y}(t) = Y(t), \quad (37)$$

El hecho de que toda la producción fluya nuevamente al hogar en forma de ingreso simplifica nuestro análisis. El sector hogares, como antes, tiene una tasa de ahorro constante sobre su ingreso:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \quad (38)$$

lo cual es nuestra conocida ley de evolución.

El estado estacionario

Comenzamos nuestro análisis con el estado estacionario utilizando la relación capital-producto:

$$z(t) = \frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{K(t)}{K(t)^\alpha (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha}} \quad (39)$$

$$= \left(\frac{K(t)}{A(t)L_Y(t)} \right)^{1-\alpha}. \quad (40)$$

Esto implica una tasa de crecimiento de

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha) (n + g(t)). \quad (41)$$

Nótese que la diferencia clave con el modelo de Solow es que $g(t)$ ya no es constante, ¡y ahora tenemos una teoría para ello!

Como siempre, nuestra segunda condición de estado estacionario proviene de la ecuación de acumulación de capital:

$$\dot{K}(t) = sK(t)^\alpha (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (42)$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta \quad (43)$$

Combinando las ecuaciones e imponiendo un estado estacionario

$$n + g(t) = \frac{s}{z^*} - \delta. \quad (44)$$

$$z^* = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^* = \frac{s}{n + g(t) + \delta}, \quad (45)$$

lo cual es una constante si $g(t)$ tiene un estado estacionario al que nos dirigimos a continuación.

La tasa de crecimiento de nuevas ideas

Recordemos la ecuación de acumulación de ideas:

$$\dot{A}(t) = \theta L_A(t)^\lambda A(t)^\phi = \theta (s_R L(t))^\lambda A(t)^\phi. \quad (46)$$

Cuando el stock actual de ideas no afecta la creación de nuevas ideas, $\phi = 1$, tenemos

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta (s_R L(t))^\lambda, \quad (47)$$

es decir, para un $L(t)$ constante, siempre tenemos un crecimiento exponencial constante.

¿Qué pasa si la mano de obra no es constante?

Sin embargo, los datos sugieren fuertemente que $\phi < 1$: $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$ es constante, pero $s_R L(t)$ está aumentando con el tiempo. Volviendo a la ecuación de acumulación de ideas:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{A(t)^{1-\phi}}. \quad (48)$$

La tasa de crecimiento sigue siendo constante si el numerador y el denominador crecen a la misma tasa, es decir,

$$(1 - \phi) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \lambda \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \lambda n \quad (49)$$

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda n}{1 - \phi} = g^*, \quad (50)$$

que es constante.

Aspectos clave sobre el crecimiento de la productividad en el estado estacionario

$$g^* = \frac{\lambda n}{1 - \phi}. \quad (51)$$

- El progreso tecnológico constante solo es posible a través del crecimiento de la población (o un aumento en la proporción de personas dedicadas a la investigación). Más personas generan más ideas, lo que aumenta la producción, es decir, es muy diferente del modelo de Solow.
- La proporción de investigadores en la población no afecta la tasa de crecimiento de la tecnología.
- Los efectos de red, λ , y la idea de pararse sobre los hombros de gigantes, ϕ , crean un progreso tecnológico más rápido.

Producción per cápita en estado estacionario

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha} \quad (52)$$

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)L_Y(t) \quad (53)$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}(1-s_R)} A(t) \quad (54)$$

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)} \right)^* = \left(\frac{s}{n + g^* + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_R)A(t) \quad (55)$$

El paso final es derivar $A(t)$ para lo cual, de nuevo, tenemos ahora una teoría.

El nivel de productividad en el modelo de Romer

Se puede demostrar que

$$A(t) = \left[A(0)^{1-\phi} + \frac{(1-\phi)}{n\lambda} \theta (s_R L(0))^\lambda [\exp(\lambda n t) - 1] \right]^{\frac{1}{1-\phi}}. \quad (56)$$

- Un nivel inicial más alto de productividad, $A(0)$, implica una mayor productividad hoy.
- Una tasa de crecimiento poblacional más alta implica una mayor productividad hoy.
- Investigadores más productivos, θ , una mayor proporción de investigadores, s_R , o una fuerza laboral inicial más grande, $L(0)$, aumentan la productividad.

Producción por trabajador y el crecimiento poblacional

Combinando todo, tenemos en el estado estacionario:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n + g^* + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_R) \left[A(0)^{1-\phi} + \frac{(1-\phi)}{n\lambda} \theta (s_R L(0))^\lambda [\exp(\lambda n t) - 1] \right]^{\frac{1}{1-\phi}}. \quad (57)$$

La tasa de crecimiento poblacional tiene un efecto ambivalente en la producción por trabajador:

- El efecto Solow: Un n más alto disminuye la relación capital-producción.
- El efecto Romer: Un n más alto aumenta la tasa de crecimiento (y el stock resultante) de ideas.

Producción por trabajador y la proporción de investigadores

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n + g^* + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_R) \left[A(0)^{1-\phi} + \frac{(1-\phi)}{n\lambda} \theta (s_R L(0))^\lambda [\exp(\lambda n t) - 1] \right]^{\frac{1}{1-\phi}}. \quad (58)$$

La proporción de investigadores tiene un efecto ambivalente en la producción por trabajador:

- Más investigadores reducen el grupo disponible para producir bienes.
- Más investigadores conducen a un mayor stock de ideas y, por lo tanto, hacen que aquellos que producen bienes sean más productivos.

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{A(t)^{1-\phi}} \quad (59)$$

Nuestro modelo sugiere dos formas de aumentar temporalmente el progreso tecnológico:

- Aumentar la proporción de investigadores.
- Aumentar la eficiencia de los investigadores.

Con $\phi < 1$, después de un aumento único en cualquiera de los dos, tenemos

$$(1 - \phi) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} > \lambda n, \quad (60)$$

es decir, el denominador crece más rápido que el numerador. A medida que se acumula el stock de ideas, $\frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{A(t)^{1-\phi}}$ cae y también lo hace el ritmo del progreso tecnológico.

Resolviendo la dinámica de transición en la productividad

Podemos usar la solución para el nivel de productividad para resolver la dinámica de transición:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{A(t)^{1-\phi}} \quad (61)$$

$$A(t) = \left[A(0)^{1-\phi} + \frac{1-\phi}{n\lambda} \theta(s_R L(0))^\lambda [\exp(\lambda n t) - 1] \right]^{\frac{1}{1-\phi}}. \quad (62)$$

Combinando las ecuaciones:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{A(0)^{1-\phi} + \frac{1-\phi}{n\lambda} \theta(s_R L(0))^\lambda [\exp(\lambda n t) - 1]} \quad (63)$$

$$= \frac{\lambda n}{1-\phi} \frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{\frac{\lambda n}{1-\phi} A(0)^{1-\phi} + \theta(s_R L(t))^\lambda - \theta(s_R L(0))^\lambda}. \quad (64)$$

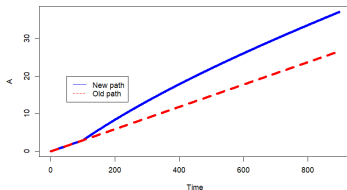
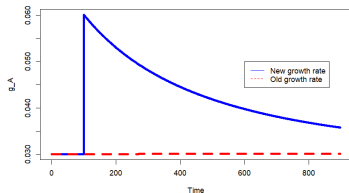
Resolviendo la dinámica de transición en la productividad II

Reordenando, obtenemos:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda n}{1 - \phi} \frac{1}{\frac{\lambda n}{1 - \phi} \frac{A(0)^{1 - \phi}}{\theta(s_R L(t))^\lambda} + 1 - \left(\frac{L(0)}{L(t)}\right)^\lambda}. \quad (65)$$

- Comenzando en el estado estacionario: $\frac{A(0)^{1 - \phi}}{\theta(s_R L(0))^\lambda} = \frac{1}{g^*} = \frac{1 - \phi}{\lambda n}$, y $L(0) = L(t)$, entonces $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda n}{1 - \phi}$.
- Para cualquier $A(0), L(0)$, a medida que pasa el tiempo, $L(t)$ crece y $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \mapsto \frac{\lambda n}{1 - \phi}$.
- Cuanto más bajo sea $A(0)$ en relación a su estado estacionario, mayor será la tasa de crecimiento inicial.
- Para cualquier $A(0), L(0)$, aumentar $s_R, \theta, \phi, \lambda$, o n incrementa $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$.

Dinámica de transición gráficamente



La tasa de crecimiento temporalmente más alta de las ideas conduce a un stock de ideas permanentemente más alto.

Como antes, escribamos la producción como una función de la relación capital-producción

$$y(t) = A(t)(1 - s_R) \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (66)$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \quad (67)$$

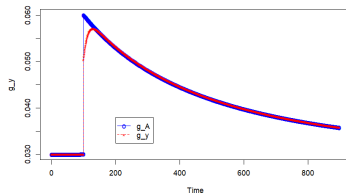
con

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{s}{z(t)} - (1 - \alpha) (n + g(t) + \delta). \quad (68)$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g(t) + \alpha \left[\frac{s}{z(t)} - (n + g(t) + \delta) \right] \quad (69)$$

Nota que, en estado estacionario, $y(t)$ crece a una tasa g . Un aumento temporal en $g(t)$ incrementa la tasa de crecimiento de $y(t)$, pero lo hace inicialmente en menor medida que el aumento en $g(t)$ porque la relación capital-producción disminuye al principio.

Dinámica de transición gráficamente II



Crecimiento schumpeteriano

- En el modelo Romer, una vez descubierto, los diseños se utilizan para siempre.
- Sin embargo, volviendo a Schumpeter, los economistas han pensado en el progreso tecnológico como diseños *mejores* que reemplazan a los diseños más antiguos.
- Por ejemplo
 - los teléfonos con pantalla táctil reemplazaron a los teléfonos con teclado.
 - el motor a reacción reemplazó a las hélices.
 - la entrega justo a tiempo sustituyó a las grandes unidades de almacenamiento central.
- [Grossman and Helpman \(1991\)](#) y [Aghion and Howitt \(1992\)](#) desarrollar modelos de esta destrucción creativa.

Al igual que antes, tendremos los mismos cuatro sectores:

- El sector de los hogares ahorra y acumula el stock de capital agregado y homogéneo.
- Los investigadores desarrollan nuevos diseños de productos que adoptan la forma de bienes de capital, por ejemplo, el diseño de un nuevo ordenador.
- Una empresa intermediaria compra este diseño y utiliza el capital del sector doméstico para convertirlo en un bien de capital productivo sobre el que posee una patente.
- Finalmente, un productor de bienes finales compra estos bienes de capital y produce el bien final bajo competencia perfecta.

El sector de los hogares, al igual que antes, acumula el stock de capital agregado y trabaja en el sector de bienes finales o en el sector de la investigación:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \quad (70)$$

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t) \quad (71)$$

$$L_A(t) = s_R L(t). \quad (72)$$

El productor de bienes finales utiliza la mano de obra de producción y la última versión de capital, x_i y productividad A_i para producir:

$$Y(t) = (L_Y(t)A_i(t))^{1-\alpha} x_i(t)^\alpha, \quad (73)$$

siendo x_i más nuevo y productivo que x_{i-1} . Por ejemplo, x_i puede ser el motor a reacción y x_{i-1} la hélice, y A_i mide la productividad del motor a reacción mientras que A_{i-1} es la productividad de la hélice.

Demanda óptima de insumos

Dado el salario, w , y los precios de cada bien de capital, p_i , el productor de bienes finales elige la cantidad de cada bien de capital y el mano de obra para maximizar las ganancias (el precio del bien de producción final es 1, y omitiendo los índices de tiempo):

$$\Pi = \max_{L_Y, x_i} \left\{ (L_Y A_i)^{1-\alpha} x_i^\alpha - w L_Y - p_i x_i \right\}. \quad (74)$$

$$w = (1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y} \quad (75)$$

$$p_i = \alpha (L_Y A_i)^{1-\alpha} x_i^{\alpha-1}. \quad (76)$$

Productores de bienes de capital

Los productores de bienes de capital compran diseños de patentes a los investigadores a un precio fijo P_A . Una vez que tienen el diseño, producen bienes de capital transformando el capital del sector doméstico en bienes de capital productivos a una tasa de uno a uno. El precio del capital es de r :

$$\max_{x_i} \{ \pi_i = p_i(x_i)x_i - rx_i \}, \quad (77)$$

lo que resuelve de nuevo para

$$p_i = \frac{1}{\alpha} r. \quad (78)$$

Cada nueva innovación es una mejora constante con respecto a la anterior:

$$A_i(t) = (1 + \gamma)A_{i-1}(t). \quad (79)$$

La probabilidad de que un investigador encuentre un nuevo diseño es

$$\bar{\mu} = \frac{\theta L_A(t)^{\lambda-1}}{A_i(t)^{1-\phi}}. \quad (80)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que se descubra un nuevo diseño es

$$\bar{\mu}L_A(t) = \frac{\theta L_A(t)^{\lambda}}{A_i(t)^{1-\phi}}. \quad (81)$$

El valor de una patente

Para calcular el valor de una patente, tenemos que tener en cuenta que pierde todo valor con probabilidad $\bar{\mu}L_A$:

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A - \bar{\mu}L_AP_A. \quad (82)$$

Se puede demostrar que esto resuelve

$$P_A = \frac{\pi}{r - n + \bar{\mu}L_A(1 - \gamma)}. \quad (83)$$

Cuanto más innovadora es una nueva patente, γ , más valor tiene. Cuanto más probable sea que aparezca una nueva innovación, $\bar{\mu}$, menor será el valor.

El número de investigadores

Utilizando de nuevo una condición de no arbitraje, en el estado estacionario, se puede demostrar que la proporción de investigadores es

$$s_R = \frac{1}{1 + \frac{r-n+\bar{\mu}L_A(1-\gamma)}{\alpha\bar{\mu}L_A}}. \quad (84)$$

Una mayor eficiencia en la investigación hace que sea más probable que reciba una patente y, por lo tanto, aumenta el número de investigadores, pero también reduce su valor.

Equilibrio del mercado y producción agregada

Como el productor de bienes finales utiliza únicamente el bien de capital más productivo, tenemos que

$$x_i = K. \quad (85)$$

Sustituyendo en su función de producción, tenemos nuevamente

$$Y(t) = (L_Y(t)A_i(t))^{1-\alpha} x_i(t)^\alpha \quad (86)$$

$$Y(t) = (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha} K(t)^\alpha \quad (87)$$

Además, la tasa de interés es

$$r(t) = \alpha \frac{Y(t)}{K(t)}. \quad (88)$$

Tenemos nuevamente para el ingreso de los hogares que

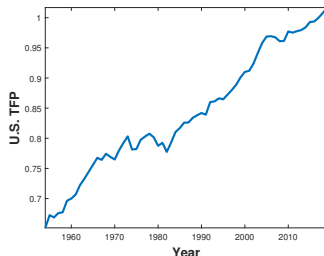
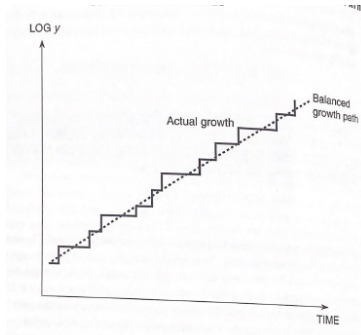
$$\tilde{Y}(t) = r(t)K(t) + \int \pi_j(t) dj + L_Y(t)w(t). \quad (89)$$

Como los precios y las ganancias no cambian, tenemos nuevamente que $\tilde{Y}(t) = Y(t)$ y, por lo tanto,

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t). \quad (90)$$

Por lo tanto, la economía agregada se comporta exactamente igual que en el modelo de Romer.

Crecimiento en estado estacionario



Una diferencia es que la productividad es estocástica, solo es continua en las expectativas.

$$\mathbb{E}A(t) = \bar{\mu}L_A(t)(1 + \gamma)A(t - 1) + (1 - \bar{\mu}L_A(t))A(t - 1) \quad (91)$$

$$\mathbb{E}A(t) = A(t - 1)(1 + \bar{\mu}L_A(t)\gamma). \quad (92)$$

Volvamos a nuestras tres grandes preguntas

- ① ¿Por qué somos tan ricos nosotros y ellos tan pobres?
 - Diferentes tasas de ahorro, tasas de crecimiento de la población y tecnologías para la acumulación de ideas.
- ② ¿Por qué hay milagros de crecimiento?
 - Rápida acumulación de capital físico o de ideas.
- ③ ¿Cuáles son los motores del crecimiento económico a largo plazo?
 - Crecimiento de la población.

- AGHION, P. AND P. HOWITT (1992): "A model of growth through creative destruction," *Econometrica*, 60.
- BLOOM, N., C. I. JONES, J. VAN REENEN, AND M. WEBB (2020): "Are ideas getting harder to find?" *American Economic Review*, 110, 1104–1144.
- GROSSMAN, G. M. AND E. HELPMAN (1991): "Innovation and growth in the global environment," .
- JAFFE, A. B. (1999): "The US patent system in transition: policy innovation and the innovation process," *NBER Working paper*, 7280.
- JONES, C. I. (2016): "The facts of economic growth," in *Handbook of macroeconomics*, Elsevier, vol. 2, 3–69.
- ROMER, P. M. (1990): "Endogenous technological change," *Journal of political Economy*, 98, S71–S102.