

Solow: Se trata de la acumulación de capital físico

Felix Wellschmied

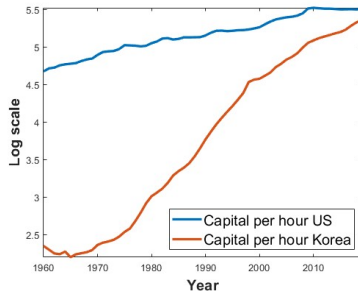
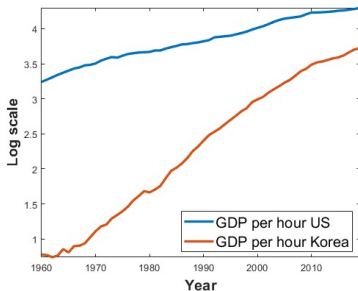
Universidad Carlos III de Madrid

Crecimiento Económico

En los últimos 150 años:

- El crecimiento económico de las economías avanzadas puede describirse como un crecimiento exponencial.
- Existen enormes diferencias entre países en cuanto a los ingresos por persona entre países.
- Las diferencias de ingresos no son estables. De hecho, hay algunos “milagros de crecimiento”.
 - Los milagros de crecimiento se asocian con una rápida acumulación de capital.

Corea, un milagro de crecimiento



- Para entender estos fenómenos, necesitamos una teoría.
- Nuestra teoría se guiará por ciertos hechos de datos.
- Estos hechos deben ser “universalmente” verdaderos, es decir, relativamente estables a lo largo del tiempo.

Kaldor (1961) resumió seis hechos sobre los ingresos.

Consideraremos los primeros cinco:

- 1 La producción por trabajador crece a un ritmo constante a lo largo del tiempo.
- 2 El capital por trabajador crece a un ritmo constante en el tiempo.
- 3 La relación capital-producción es constante en el tiempo.
- 4 El capital tiene una tasa de rendimiento constante en el tiempo.
- 5 La proporción de ingresos que va al capital es constante en el tiempo.

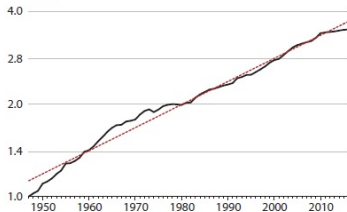
Recientemente, [Herrendorf et al. \(2019\)](#) consideran estos hechos de nuevo, incluyendo datos recientes:

- 1 En términos generales, los hechos de Kaldor siguen siendo válidos.
- 2 Sin embargo, algunos momentos de datos muestran cierta variación temporal.
- 3 Sin embargo, en este curso utilizaremos los hechos de Kaldor como punto de referencia.

Crecimiento constante de la producción por trabajador

A. GDP Per Worker, 1947 = 1

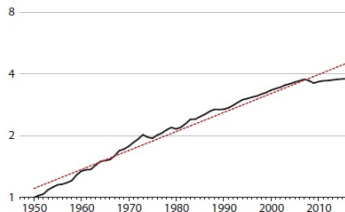
Log Scale



U.S.

A. GDP Per Worker, 1950 = 1

Log Scale



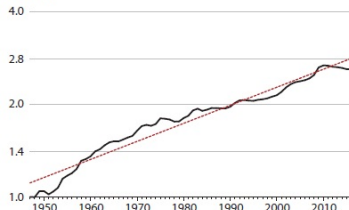
UK

- Un crecimiento constante de la producción por trabajador es una buena aproximación.
- Sin embargo, observamos una desaceleración después de 1970.

Crecimiento constante del capital por trabajador

B. Capital Stock Per Worker, 1947 = 1

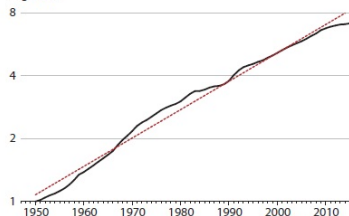
Log Scale



U.S.

B. Capital Stock Per Worker, 1950 = 1

Log Scale

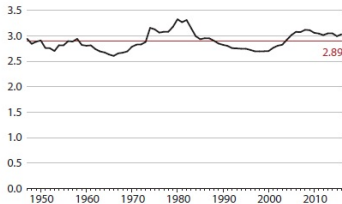


UK

- Un crecimiento constante del capital por trabajador es una buena aproximación.
- Sin embargo, observamos una desaceleración después de 1970.

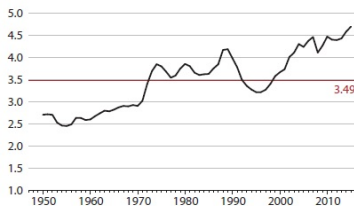
Una relación capital-producción constante

D. Capital-to-GDP Ratio



U.S.

D. Capital-to-GDP Ratio



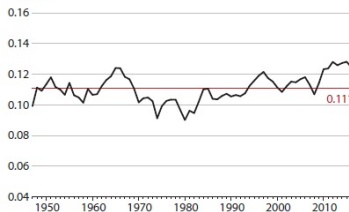
UK

- En Estados Unidos, el capital y la producción crecen aproximadamente al mismo ritmo.
- En el Reino Unido, el capital crece más rápido que la producción.

Retorno constante al capital

C. Gross Return on Capital

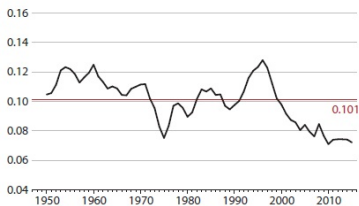
Percent



U.S.

C. Gross Return on Capital

Percent



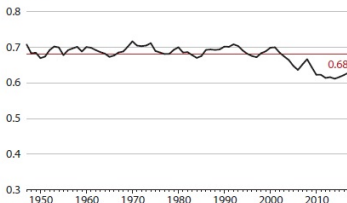
UK

- Un rendimiento constante del capital es una buena aproximación.
- Desde la década de 2000, observamos cierta variación temporal que es diferente entre países.

Una participación constante del capital en los ingresos

E. Labor Share

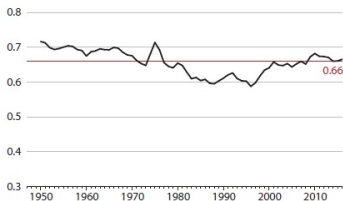
Percent



U.S.

E. Labor Share

Percent



UK

- En lugar de la participación del capital, consideran que es más fácil medir la participación del trabajo.
- La participación laboral comenzó a caer en Estados Unidos durante la década de 2000. Estaba cayendo en el Reino Unido entre los años 50 y 2000.

Comprender el crecimiento económico moderno

Un primer intento de entender el crecimiento económico moderno

- Solow (1956) presenta un marco sobre cómo entender el fenómeno del crecimiento económico moderno (factores Kaldor). Por ese trabajo, ganó el premio Nobel.
- Es una modelo de economía cerrada donde la producción tiene lugar por el trabajo, el capital y la tecnología.
- Toma el crecimiento tecnológico como exógeno y pone la acumulación de capital físico en el centro del escenario.

Cómo se lleva a cabo la producción

El mundo real

- En una economía moderna, la producción tiene lugar principalmente en empresas que a menudo son corporaciones multinacionales.
- Estas empresas producen miles de bienes y servicios diferentes que dependen de miles de importaciones y crean miles de exportaciones.
- Para la producción, emplean
 - mano de obra de diferentes tipos (educación, edad, sexo...)
 - equipos, estructuras, carreteras, terrenos, materias primas...
- Gran parte de la producción también es realizada por el gobierno.
- La mayor parte del intercambio de bienes y servicios, así como de los factores de la producción, se lleva a cabo en miles de mercados.
- Las personas toman decisiones sobre el consumo hoy frente al futuro.  

El mundo es bastante complicado (más que la Inglaterra medieval) y tendremos que hacer simplificaciones para avanzar en su comprensión:

- Asumimos una economía cerrada.
- Nos abstenemos del gobierno y la tratamos como al sector privado.
- Solo hay un bien de producción.
- La producción se lleva a cabo a nivel de empresas que alquilan los factores de producción a los hogares.

Para entender como empresas y hogares interactúan, fijamos en los datos de las cuentas nacionales:

- La participación en los beneficios del ingreso nacional es relativamente pequeña, como 5%.
- Esto sugiere que los mercados de productos y los mercados de los factores de producción son casi perfectamente competitivos.

Por lo tanto, los factores de producción ganan sus productos marginales

Abstracciones: factores de producción

Para centrarnos en los factores de producción correctos, nos fijamos de nuevo en los cuentas nacionales:

- Como hemos visto anteriormente, la compensación laboral representa aproximadamente $2/3$ de la renta nacional, es decir, es importante, y por ello incluimos el trabajo en el modelo.
- El segundo gran receptor de la renta nacional es el capital, el cual también incluimos en el modelo. Tratamos la tierra como capital. Se puede objetar que la tierra es finita. Sin embargo, los fertilizantes y los edificios altos sugieren lo contrario.
- Los recursos naturales son diferentes del capital porque son finitos. Incluso para los Estados Unidos, un importante productor de petróleo, los ingresos provenientes de los recursos naturales son relativamente pequeños. Por lo tanto, los ignoraremos. También se pueden interpretar como capital físico, reconociendo que, hasta ahora, su oferta no se ha agotado.

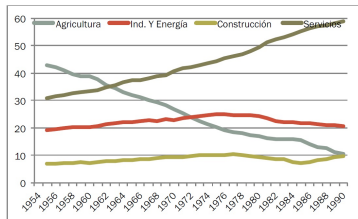
Para hacer que el modelo sea manejable, asumimos que podemos agregar trabajo y capital:

- Agregamos el trabajo a través de ocupaciones y habilidades de los trabajadores.
- Agregamos el capital a través de todos los tipos de bienes de capital.

También asumimos una sola medida sobre qué tan bien usamos el capital y el trabajo para producir producción, es decir, tecnología.

- Esto puede estar relacionado con la organización de la empresa, por ejemplo, el estilo de gestión.
- Esto puede estar relacionado con la logística, por ejemplo, la entrega justo a tiempo.
- Esto puede relacionarse con nuevos productos que son mejores que el producto anterior pero no más caros de producir, por ejemplo, un algoritmo informático más rápido.
- De hecho, muchos de los productos que consumimos hoy en día no existían hace 50 años.
- Por lo tanto, pensaremos en las mejoras en A como nuevas *ideas*, o mejores recetas.

¿Más productos o nuevos productos?



El tipo de productos que producimos hoy en día se ve muy diferente del tipo de productos que producimos en 1955.

Abstracciones: La función de producción agregada

Nuestros supuestos implican que las empresas operan una función de producción agregada que combina trabajo, L , capital, K , y el nivel de tecnología, A , en un solo bien: $Y = F(K, L, A)$. Nuestro modelo debe ser consistente con los hechos de Kaldor. Ahora usamos el hecho de las participaciones de renta constante para averiguar cómo debería ser F :

$$\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha, \quad (1)$$

$$\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha. \quad (2)$$

Dado el supuesto de mercados competitivos, tenemos:

$$\frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} K(t)}{Y(t)} = \alpha, \quad (3)$$

$$\frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} L(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Abstracciones: La función de producción agregada II

Esto se aplica, entre otras, a la función de producción de Cobb-Douglas:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} \quad (5)$$

Tenga en cuenta que el lugar de $A(t)$ en la función de producción no es particularmente importante:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} = A(t)^{1-\alpha} K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha} = E(t) K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}, \quad (6)$$

con $E(t) = A(t)^{1-\alpha}$. La forma en que lo he escrito arriba hará que las matemáticas sean más fáciles.

Abstracciones: La función de producción agregada III

Una propiedad clave de la función de producción agregada son los rendimientos marginales decrecientes de los factores de producción:

$$\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial^2 L(t)} = -\alpha(1 - \alpha)K(t)^\alpha A(t)^{1-\alpha} L(t)^{-\alpha-1} < 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial^2 K(t)} = (\alpha - 1)\alpha K(t)^{\alpha-2} (A(t)L(t))^{1-\alpha} < 0. \quad (8)$$

- Una de las preguntas más importantes en la macroeconomía moderna es cómo los hogares compensan el consumo de hoy con el de mañana.
- El modelo de Solow se abstrae de esto y asume que los hogares ahorran una fracción constante de sus ingresos cada período.

Resolviendo el modelo

Producción vs. ingreso

Para conocer las decisiones de los hogares, necesitamos conocer sus ingresos. Los precios de sus factores de producción son:

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1 - \alpha)K(t)^\alpha A(t)^{1-\alpha} L(t)^{-\alpha} \quad (9)$$

$$r(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1} (A(t)L(t))^{1-\alpha} \quad (10)$$

$$(11)$$

Por lo tanto, como los hogares son propietarios de los factores de producción, el ingreso total del hogar es

$$r(t)K(t) + w(t)L(t) = Y(t). \quad (12)$$

Esto será conveniente, ya que no necesitamos distinguir entre la producción y los ingresos de los hogares. Es decir, los ahorros agregados son simplemente $S(t) = sY(t)$.

El modelo de Solow asume que cada período se deprecia una fracción δ del stock de capital. Trabajando en contra de esto, los hogares invierten $I(t) = S(t)$:

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t) \quad (13)$$

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \quad (14)$$

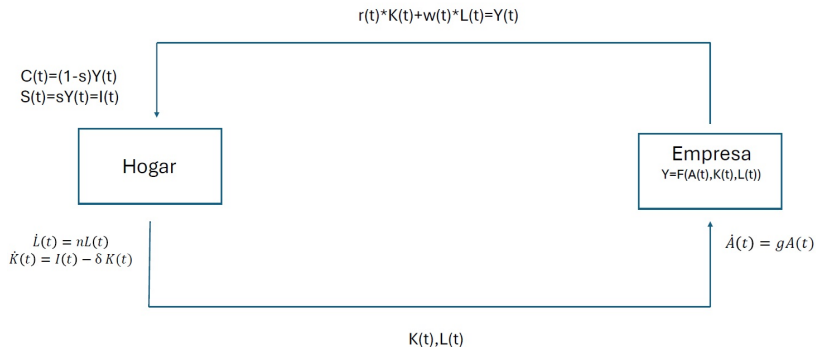
$$\dot{K}(t) = sK(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} - \delta K(t). \quad (15)$$

El modelo de Solow asume que la población y la tecnología crecen a tasas exógenas. Para ser consistente con los hechos de Kaldor sobre la productividad laboral, asume que crecen exponencialmente:

$$L(t) = L(0) \exp(nt) \Rightarrow \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \quad (16)$$

$$A(t) = A(0) \exp(gt) \Rightarrow \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g. \quad (17)$$

Resumen de la economía



Como antes, comenzaremos nuestro análisis con el estado estacionario del modelo. Para esto, necesitamos encontrar una variable que tenga un estado estacionario. Resulta que, en el modelo de Solow, esta variable es la razón capital-producción, que es consistente con una proporción constante en el tiempo según los datos. Para encontrar el estado estacionario, usamos la función de producción para escribir:

$$z(t) = \frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{K(t)}{K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha}} \quad (18)$$

$$= \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)} \right)^{1-\alpha} . \quad (19)$$

Tasa de crecimiento de la razón capital-producción

Como nos interesan sus dinámicas, escribimos esto en términos de su tasa de crecimiento, usando que la derivada de una variable en logaritmos con respecto al tiempo es la tasa de crecimiento de esa variable:

$$\ln z(t) = (1 - \alpha) \ln K(t) - (1 - \alpha)(\ln L(t) + \ln A(t)) \quad (20)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha) \left(\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha)(n + g). \quad (22)$$

Tasa de crecimiento de la razón capital-producción II

Conjeturemos que existe un estado estacionario con $\dot{z}(t) = 0$:

$$0 = (1 - \alpha) \left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right)^* - (1 - \alpha)(n + g) \quad (23)$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right)^* = n + g. \quad (24)$$

Si existe un estado estacionario donde la razón capital-producción es constante, el capital debe crecer a una tasa de $n + g$.

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital

Necesitamos encontrar una expresión para la tasa de crecimiento del stock de capital:

$$\dot{K}(t) = sK(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (25)$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta \quad (26)$$

Combinando las ecuaciones y evaluando en el estado estacionario:

$$n + g = \frac{s}{z^*} - \delta \quad (27)$$

$$z^* = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta}. \quad (28)$$

$$z^* = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta}. \quad (29)$$

Nuestra variable, z^* , depende solo de parámetros invariantes en el tiempo. Por lo tanto, si existe un estado estacionario, lo hemos encontrado. Cabe mencionar que aún no sabemos si $K(t)$ y $Y(t)$ son constantes en el estado estacionario (no lo son), solo sabemos que su razón es constante.

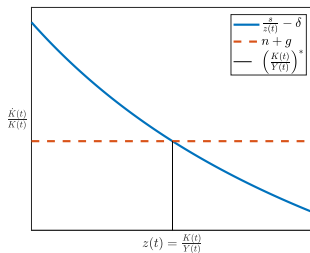
Razón capital-producción en el estado estacionario

$$\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^* = \frac{s}{n + g + \delta}. \quad (30)$$

La razón capital-producción en el estado estacionario es:

- creciente en la tasa de ahorro.
- decreciente en la tasa de depreciación del capital.
- decreciente en la tasa de crecimiento de la población.
- decreciente en la tasa de crecimiento tecnológico.

El estado estacionario gráficamente



Dos condiciones de estado estacionario:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta \quad (31)$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right)^* = n + g \quad (32)$$

Observa que existe un único estado estacionario con $\frac{K(t)}{Y(t)} > 0$.

Producción per cápita en el estado estacionario

Comencemos con la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} \quad (33)$$

$$\frac{Y(t)}{Y(t)^\alpha} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} \quad (34)$$

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)L(t) \quad (35)$$

$$Y(t) = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)L(t) \quad (36)$$

$$y(t) = \left(\frac{Y(t)}{L(t)} \right)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \quad (37)$$

Producción per cápita en el estado estacionario II

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \quad (38)$$

A diferencia del modelo Malthusiano, el modelo de Solow puede explicar las diferencias de largo plazo en la renta per cápita:

- Un mayor nivel tecnológico incrementa la producción per cápita. Sin embargo, este es un proceso exógeno, es decir, el modelo no nos ayuda a comprender las diferencias entre países.
- La parte endógena que el modelo nos ayuda a entender son las diferencias en las razones capital-producción entre países.

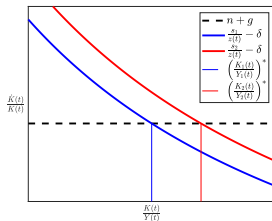
Producción per cápita en el estado estacionario III

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \quad (39)$$

Un país es rico debido a una alta razón capital-producción porque tiene

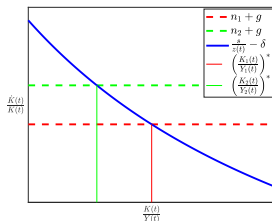
- una alta tasa de ahorro.
- una baja tasa de crecimiento de la población o tasa de depreciación del capital.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de ahorro



Consideremos un aumento en la tasa de ahorro. En el estado estacionario, gráficamente, para cualquier nivel de $\frac{K(t)}{Y(t)}$, $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta$ aumenta. El nuevo estado estacionario está asociado con un valor más alto de $\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^*$ y, por lo tanto, con un valor más alto de $y(t)^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)$.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de crecimiento de la población



Consideremos un aumento en la tasa de crecimiento de la población. En el estado estacionario, gráficamente, para cualquier nivel de $\frac{K(t)}{Y(t)}$, $n + g$ aumenta. El nuevo estado estacionario está asociado con un valor más bajo de $\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^*$ y, por lo tanto, con un valor más bajo de

$$y(t)^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t).$$

Consumo per cápita en el estado estacionario

Una vez que conocemos la producción (per cápita), calcular el consumo es sencillo, ya que es solo una fracción constante de la producción:

$$C(t) = (1 - s)Y(t) \quad (40)$$

Por lo tanto, el consumo por trabajador en el estado estacionario es

$$\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)^* = (1 - s) \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t). \quad (41)$$

Capital per cápita en el estado estacionario

Comenzamos con la razón capital-producto en el estado estacionario

$$\left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta} \quad (42)$$

y sustituimos en la función de producción:

$$\left(\frac{K(t)}{K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha}} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta} \quad \left(\frac{K(t)^{1-\alpha}}{L(t)^{1-\alpha}} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta} A(t)^{1-\alpha} \quad (43)$$

Por lo tanto, en el estado estacionario:

$$\left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t). \quad (44)$$

El precio de alquiler del capital en el estado estacionario

El precio de alquiler del capital viene dado por

$$r(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1} (A(t)L(t))^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)} \quad (45)$$

$$r^* = \frac{\alpha}{\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^*} = \alpha \frac{n + g + \delta}{s}, \quad (46)$$

que es constante a largo plazo. Por lo tanto, el modelo de Solow es coherente con el hecho de Kaldor sobre la constancia de los rendimientos del capital.

El salario viene dado por

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1 - \alpha)A(t) \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)} \right)^\alpha \quad (47)$$

$$w(t) = (1 - \alpha)A(t)^{1-\alpha} \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)^\alpha \quad (48)$$

$$w(t) = (1 - \alpha)A(t) \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (49)$$

$$w(t)^* = (1 - \alpha)A(t) \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (50)$$

que crece a la tasa g en el estado estacionario. Kaldor no estudió los salarios, pero este hecho también se confirma en los datos.

Participación de los factores en el estado estacionario

Las participaciones del ingreso que van al capital y al trabajo, respectivamente, son:

$$\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} = \alpha Y(t) \quad (51)$$

$$\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = (1 - \alpha) K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} = (1 - \alpha) Y(t). \quad (52)$$

Es decir, el capital obtiene α de la producción y el trabajo obtiene $1 - \alpha$ de la producción. Por lo tanto, el modelo de Solow también es coherente con los hechos de Kaldor sobre las participaciones constantes de los factores.

Crecimiento del capital en el estado estacionario

En el estado estacionario, por definición, la razón capital-producción es constante. Sin embargo, esto no significa que el capital o el capital por trabajador sean constantes. De hecho, ya sabemos que:

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha)(n + g) \quad (53)$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right)^* = n + g \quad (54)$$

$$\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \right)^* = g. \quad (55)$$

Es decir, en el estado estacionario, el capital per cápita crece a la tasa de progreso tecnológico. Una tasa de crecimiento constante del capital per cápita es uno de los hechos estilizados de Kaldor.

Intuición: ¿Por qué crece el capital en el estado estacionario?

Dada nuestra función de producción, la razón capital-producción es proporcional al producto marginal del capital:

$$\frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{K(t)}{K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha}} = \frac{\alpha}{PMK(t)}. \quad (56)$$

Como $PMK(t)$ mide la productividad del capital, esta relación nos permite comprender mejor la intuición económica del modelo.

Intuición: ¿Por qué crece el capital en el estado estacionario II?

De la ecuación de acumulación de capital:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{sY(t)}{K(t)} - \delta = \frac{s}{\frac{K(t)}{Y(t)}} - \delta \quad (57)$$

$$= \frac{s}{\alpha} PMK(t) - \delta \quad (58)$$

Dado que la tecnología y la mano de obra están creciendo, ceteris paribus, el producto marginal del capital está aumentando. Un mayor producto marginal impulsa la inversión por unidad de capital por encima de la tasa de depreciación de ese capital (δ), lo que lleva a un crecimiento adicional del capital. Este crecimiento adicional del capital reduce nuevamente su producto marginal, lo que conduce a un producto marginal constante en el estado estacionario: $PMK^* = \frac{\alpha}{\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^*} = \alpha \frac{n+g+\delta}{s}$.

Crecimiento de la producción en el estado estacionario

La tasa de crecimiento de la producción es

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \quad (59)$$

$$\left(\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right)^* = n + g \quad (60)$$

$$\left(\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right)^* = g. \quad (61)$$

Por lo tanto, la producción per cápita en el estado estacionario también crece a la tasa de progreso tecnológico, otro hecho de Kaldor.

Intuición: ¿Por qué crece la producción en el estado estacionario?

Escribiendo la función de producción en términos de tasas de crecimiento, tenemos

$$Y(t) = K(t)^\alpha (L(t)A(t))^{1-\alpha} \quad (62)$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + (1 - \alpha) \left(\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right). \quad (63)$$

La ecuación podría sugerir que la producción debería crecer a una tasa de $(1 - \alpha)(n + g) < n + g$. Como tenemos rendimientos decrecientes, un aumento en $L(t)$ o $A(t)$ incrementa la producción por menos de una unidad. Sin embargo, el capital también crece endógenamente a $n + g$. Junto con rendimientos constantes a escala, obtenemos una tasa de crecimiento de la producción de $n + g$.

Crecimiento del consumo en el estado estacionario

Finalmente, para el consumo,

$$C(t) = (1 - s)Y(t) \quad (64)$$

$$\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \right)^* = n + g \quad (65)$$

$$\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right)^* = g. \quad (66)$$

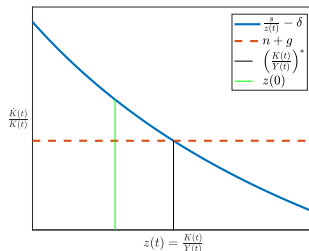
Por lo tanto, el consumo per cápita en el estado estacionario también crece a la tasa de progreso tecnológico. Un estado estacionario en el que todas las variables endógenas crecen a la misma tasa se denomina *trayectoria de crecimiento balanceado*.

¿Qué sucede fuera del estado estacionario?

Por lo tanto, tenemos un modelo que es consistente con los hechos de Kaldor una vez que la economía está en estado estacionario. Sin embargo, también nos interesa entender cómo se comporta la economía fuera del estado estacionario:

- Todavía tenemos que demostrar que el estado estacionario existe y, si existe, si la economía converge a su estado estacionario.
- Permite estudiar cómo la economía se mueve de un estado estacionario a otro si los parámetros cambian.
- De hecho, veremos que las dinámicas fuera del estado estacionario nos permiten entender los milagros de crecimiento.

¿Convergemos al estado estacionario?

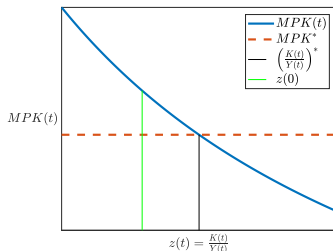


Cuando $z(t) < z^*$, $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta > n + g$, y, por lo tanto, la relación capital-producto está creciendo:

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha)(n + g). \quad (67)$$

Por lo tanto, convergemos al estado estacionario desde cualquier punto de partida $z(0) > 0$.

Intuición para la convergencia al estado estacionario



Cuando $z(t) < z^*$, el producto marginal del capital es mayor que en el estado estacionario. A altos niveles de la relación capital-producto, ocurre lo contrario.

Intuición para la convergencia al estado estacionario II

A bajos niveles de la relación capital-producto, el producto marginal del capital es alto y, por lo tanto, la rentabilidad neta por unidad de inversión es mayor que la tasa de crecimiento del producto en estado estacionario ($n + g$), lo que conduce a un aumento en la relación capital-producto:

$$\frac{s}{\alpha} PMK(t) - \delta > n + g \text{ si } z(t) < z^*. \quad (68)$$

A altos niveles de la relación capital-producto, el producto marginal del capital es bajo y, por lo tanto, la rentabilidad neta por unidad de inversión es menor que la tasa de crecimiento del producto en estado estacionario ($n + g$), lo que conduce a una disminución en la relación capital-producto:

$$\frac{s}{\alpha} PMK(t) - \delta < n + g \text{ si } z(t) > z^*. \quad (69)$$

Convergencia al estado estacionario

Veremos que podemos resolver el camino de convergencia explícitamente en términos de la relación capital-producto:

$$\underbrace{\frac{K(t)}{Y(t)}}_{\frac{\alpha}{PMK(t)}} - \underbrace{\frac{s}{n+g+\delta}}_{\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^*} = \left[\frac{K(0)}{Y(0)} - \frac{s}{n+g+\delta} \right] \exp(-\beta t). \quad (70)$$

- $\frac{K(t)}{Y(t)} - \frac{s}{n+g+\delta}$ converge a cero a la tasa $\beta = (1 - \alpha)(n + g + \delta)$.
- En palabras: La brecha absoluta entre la relación capital-producto y su estado estacionario desaparece a la tasa β .

Forma de la convergencia

Para entender mejor la forma de la convergencia, combinemos la dinámica de $\dot{z}(t)$ sin imponer un estado estacionario:

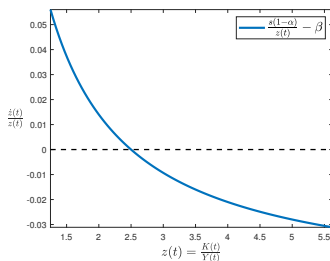
$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \left(\frac{s}{z(t)} - \delta \right) - (1 - \alpha)(n + g) \quad (71)$$

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \frac{s(1 - \alpha)}{z(t)} - \beta \quad (72)$$

Observa que la tasa de crecimiento es 0 si $z(t) = \frac{s}{n+g+\delta} = z^*$. Es una función decreciente y convexa en $z(t)$, y

$$\begin{aligned} z(t) \mapsto 0 & \quad \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \mapsto \infty \\ z(t) \mapsto \infty & \quad \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \mapsto -\beta. \end{aligned}$$

Crecimiento de $z(t)$ gráficamente



$$\begin{aligned} z(t) \mapsto 0 & \quad \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \mapsto \infty \\ z(t) \mapsto \infty & \quad \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \mapsto \beta. \end{aligned}$$

Transición después de un cambio de política

Consideremos un aumento en la tasa de ahorro o una disminución en la tasa de crecimiento de la población. Hemos visto que estos no cambian la tasa de crecimiento del producto por trabajador en el estado estacionario. Sin embargo, aumentan su tasa de crecimiento temporalmente durante la fase de transición. Para ver esto, nota lo siguiente:

$$y(t) = z(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \quad (73)$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} + g. \quad (74)$$

Durante la transición, $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta > n + g$ y, por lo tanto, la relación capital-producto está aumentando.

Cálculo de la tasa de crecimiento durante la transición

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} + g. \quad (75)$$

Cualitativamente, ya sabemos que $\frac{\dot{z}(t)}{z(t)}$ será más alta directamente después del cambio de política y convergerá a cero a medida que la economía se acerque a su estado estacionario. Sin embargo, también podemos calcular los valores exactos. Recordemos:

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{s}{z(t)} - (1 - \alpha)(n + g + \delta) \quad (76)$$

con

$$z(t) = \frac{s}{n + g + \delta} + \left[z(0) - \frac{s}{n + g + \delta} \right] \exp(-\beta t) \quad (77)$$

Cálculo de la tasa de crecimiento durante la transición II

Combinando términos:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \alpha \left[\frac{s}{\frac{s}{n+g+\delta} + \left[z(0) - \frac{s}{n+g+\delta} \right] \exp(-\beta t)} - (n + g + \delta) \right] \quad (78)$$

Dividiendo numerador y denominador por z^* se obtiene:

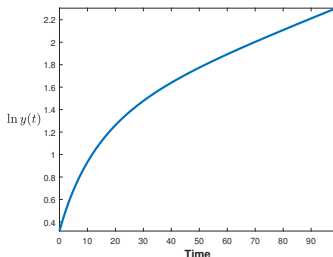
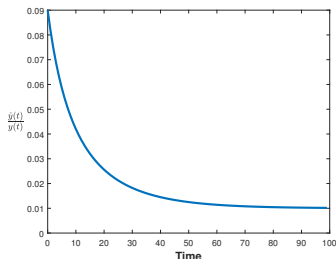
$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \alpha \left[\frac{n + g + \delta}{1 + \left[\frac{z(0)}{z^*} - 1 \right] \exp(-\beta t)} - (n + g + \delta) \right] \quad (79)$$

Cálculo de la tasa de crecimiento durante la transición II

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \alpha \left[\frac{n + g + \delta}{1 + \left[\frac{z(0)}{z^*} - 1 \right] \exp(-\beta t)} - (n + g + \delta) \right] \quad (80)$$

- Cuando se comienza en el estado estacionario: $z(0) = z^*$, $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g$.
- Para cualquier $z(0)$, a medida que pasa el tiempo, $\exp(-\beta t) \mapsto 0$ y $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \mapsto g$.
- Dado un t , cuanto más pequeño es $\frac{z(0)}{z^*}$, mayor es la tasa de crecimiento.

Gráficos del crecimiento de la producción por trabajador fuera del estado estacionario



Inicialmente, la economía acumula capital rápidamente y la producción por trabajador está creciendo rápidamente: $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} + g$. A medida que la acumulación de capital se desacelera, también lo hace el crecimiento de la producción por trabajador. Cabe señalar que, en el modelo de Solow, una tasa de crecimiento diferente a la tasa de crecimiento (exógena) g solo puede resultar de un cambio en la relación capital-producción.

Introducción del capital humano

Hasta ahora, asumimos que todos los trabajadores son igualmente productivos a través del tiempo y los países. Sin embargo

- el número promedio de años de escolaridad varía sustancialmente dentro de un país a lo largo del tiempo y entre países.
- la calidad de la escolarización varía sustancialmente dentro de un país a lo largo del tiempo y entre países.
- dentro de un país en un momento dado, las diferencias de ingresos entre los grupos de educación son grandes, lo que sugiere que la educación es importante para la productividad.

Para introducir el capital humano, hacemos un pequeño cambio en la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha} \quad (81)$$

$$H(t) = \exp(\psi u)L(t), \quad (82)$$

donde $L(t)$ es la cantidad de trabajo, y $H(t)$ es la cantidad de capital humano total. El capital humano total no solo depende de la cantidad de mano de obra sino también del tiempo invertido en educación, u .

Tenga en cuenta que

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u} = \psi \exp(\psi u) L(t) = \psi H(t) \quad (83)$$

$$\frac{\partial \ln H(t)}{\partial u} = \psi. \quad (84)$$

Es decir, un cambio en u se traduce en ψ por ciento más de capital humano. Una forma de interpretar ψ es pensar en la calidad del sistema educativo durante un tiempo fijo en él.

Nuevamente, la razón capital-producto tiene un estado estacionario. Para encontrarlo, utilizamos nuevamente la función de producción para escribir:

$$z(t) = \frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{K(t)}{K(t)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha}} \quad (85)$$

$$= \left(\frac{K(t)}{A(t)H(t)} \right)^{1-\alpha}. \quad (86)$$

Tasa de crecimiento de la razón capital-producto

Como antes, derivamos nuevamente su tasa de crecimiento:

$$\ln z(t) = (1 - \alpha) \ln K(t) - (1 - \alpha)(\ln H(t) + \ln A(t)) \quad (87)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha) \left(\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right) \quad (88)$$

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha)(n + g) \quad (89)$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right)^* = n + g \quad (90)$$

porque ψ y u son constantes y, por lo tanto, $\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$.

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital

Nuevamente, necesitamos encontrar una expresión para la tasa de crecimiento del stock de capital

$$\dot{K}(t) = sK(t)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (91)$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{z(t)} - \delta. \quad (92)$$

Combinando las ecuaciones y evaluando en el estado estacionario

$$n + g = \frac{s}{z^*} - \delta. \quad (93)$$

Resolviendo para el estado estacionario

La ecuación es la misma que en el modelo sin educación y, por lo tanto, la razón capital-producto en el estado estacionario es la misma:

$$z^* = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta}. \quad (94)$$

Producto per cápita en el estado estacionario

Por lo tanto, el producto por trabajador en el estado estacionario es:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha} \quad (95)$$

$$\frac{Y(t)}{Y(t)^\alpha} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha} \quad (96)$$

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)H(t) \quad (97)$$

$$Y(t)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)H(t) \quad (98)$$

$$y(t)^* = \left(\frac{Y(t)}{L(t)} \right)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \exp(\psi, u). \quad (99)$$

El producto per cápita aumenta con la cantidad de educación. Una fuerza laboral más educada es más productiva y, por lo tanto, permite que cada trabajador produzca más.

Capital per cápita en el estado estacionario

El producto aumenta uno a uno con $\exp(\psi, u)$. La razón es que el capital (per cápita) también aumenta en $\exp(\psi, u)$:

$$\left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta} \quad (100)$$

y sustituimos en la función de producción:

$$\left(\frac{K(t)}{K(t)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha}} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta} \quad (101)$$

$$\left(\frac{K(t)^{1-\alpha}}{L(t)^{1-\alpha}} \right)^* = \frac{s}{n + g + \delta} A(t)^{1-\alpha} \exp(\psi, u)^{1-\alpha} \quad (102)$$

Por lo tanto, en el estado estacionario:

$$\left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t) \exp(\psi, u). \quad (103)$$

La educación hace que el capital sea más productivo, lo que conduce a una mayor razón capital por trabajador.

Crecimiento en el estado estacionario

Podemos preguntarnos nuevamente sobre la tasa de crecimiento en el estado estacionario. Como se supone que la educación es constante, realmente nada cambia:

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = (1 - \alpha) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - (1 - \alpha)(n + g) \quad (104)$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right)^* = n + g \quad (105)$$

$$\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \right)^* = g. \quad (106)$$

Es decir, el capital per cápita (y el producto/consumo per cápita) crece a la tasa de progreso tecnológico.

Dinámicas de transición

Ya hemos visto que los cambios en las tasas de crecimiento de la población y en las tasas de ahorro pueden generar dinámicas de transición complejas para el producto por trabajador. Ahora también podemos analizar los cambios en la educación. En general, el producto por trabajador es:

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) L(t) \exp(\psi, u) \quad (107)$$

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \exp(\psi, u). \quad (108)$$

Dado que las variables de educación son constantes, la tasa de crecimiento del producto por trabajador es nuevamente

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} + g. \quad (109)$$

Como hemos visto antes, la ecuación dinámica para la razón capital-producto es la misma. Por lo tanto, su solución también es la misma:

$$z(t) = \frac{s}{n + g + \delta} + \left[z(0) - \frac{s}{n + g + \delta} \right] \exp(-\beta t), \quad (110)$$

la cual es nuevamente independiente de las variables de educación. Por lo tanto, uno podría pensar que los cambios en las variables de educación no implican dinámicas de transición, es decir, que la economía salta directamente a su nuevo estado estacionario.

Dinámicas de transición III

Esta conclusión es incorrecta. Como hemos visto, aumentar el tiempo dedicado a la educación, u , o la calidad de la educación, ψ , en un periodo $t = 0$ aumenta el producto en el periodo 0:

$$Y(0) = K(0)^\alpha (A(0)L(0) \exp(\psi, u))^{1-\alpha}. \quad (111)$$

Por lo tanto, en el periodo 0, la razón capital-producto cae, y $z(0) < z^* = \frac{s}{n+g+\delta}$. Como resultado, la razón capital-producto crecerá con el tiempo hasta volver a su estado estacionario:

$$z(t) = \frac{s}{n+g+\delta} + \left[z(0) - \frac{s}{n+g+\delta} \right] \exp(-\beta t), \quad (112)$$

lo que implica que el producto por trabajador crecerá más rápido que en el estado estacionario:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} + g. \quad (113)$$

Un aumento en la educación incrementa el producto marginal del capital:

$$PMK(t) = \alpha K(t)^{\alpha-1} (A(t)H(t))^{1-\alpha} \quad (114)$$

$$= \frac{\alpha}{\frac{K(t)}{Y(t)}}. \quad (115)$$

Como antes, cuando el producto marginal del capital es mayor que en el estado estacionario, el rendimiento neto por unidad de inversión por capital, $\frac{s}{\alpha} PMK(t) - \delta$, es mayor que la tasa de crecimiento del producto en el estado estacionario, $(n + g)$, lo que conduce a un aumento en la razón capital-producto.

Dinámicas de transición: una evaluación crítica

Un punto crítico en el análisis anterior es que el producto responde en el periodo 0:

$$Y(0) = K(0)^\alpha (A(0)L(0) \exp(\psi, u))^{1-\alpha}, \quad (116)$$

pero el capital evoluciona lentamente:

$$\dot{K}(t) = sK(t)^\alpha (A(t)H(t))^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (117)$$

lo que lleva a una caída inicial en la razón capital-producto. Sin embargo, es poco probable que el capital humano salte instantáneamente a su nuevo nivel con la reforma, ya que educar a la fuerza laboral toma tiempo. Más adelante veremos un modelo donde el capital humano también necesita construirse con el tiempo.

¿Cuánto *debemos* ahorrar?

¿Cuánto deberíamos ahorrar?

Hasta ahora, tomamos la tasa de ahorro como dada. Uno podría preguntarse si existe una tasa de ahorro óptima. Una posibilidad para definir "óptima" es la tasa de ahorro que maximiza el consumo por trabajador a largo plazo:

$$\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)^* = (1-s) \left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = (1-s) \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \exp(\psi, u) \quad (118)$$

La tasa de ahorro resultante se conoce como la regla de oro s_{Gold} .

Tomando la condición de primer orden, obtenemos

$$s_{Gold} = \alpha. \quad (119)$$

Intuición: Cuanto más importante es el capital en la función de producción, más deberíamos ahorrar.

La economía detrás de la regla de oro

Recordemos que en el estado estacionario, el producto marginal del capital es

$$PMK^* = \alpha \frac{n + g + \delta}{s}. \quad (120)$$

Una mayor tasa de ahorro conduce a más capital en el estado estacionario y, por lo tanto, a un producto marginal menor. En la regla de oro,

$$PMK^* - \delta = n + g. \quad (121)$$

La ganancia marginal neta de una unidad adicional de capital debe igualar sus “costos marginales” (el ahorro marginal requerido para mantener constante la razón capital-producto en el estado estacionario).

¿Estamos ahorrando lo suficiente?

Para evaluar si España tiene una tasa de ahorro consistente con la regla de oro, considere los siguientes datos

- 1 El coeficiente de producción de capital es 2.75: $k = 2.75y$.
- 2 La depreciación del capital es del 10 por ciento de la producción anual: $\delta k = 0.1y$.
- 3 La participación del capital en los ingresos es 30%
- 4 El crecimiento de la producción es 3%.

¿Estamos ahorrando lo suficiente? II

La combinación de 1 y 2 nos dice que la tasa de depreciación es 3.6%.

Según nuestro modelo, 3 implica $PMK^*k = 0.3y$. Combinando con 1 tenemos $PMK = 0.11$.

Según nuestro modelo, 4 implica $n + g = 0.03$.

Por lo tanto, $PMK > n + g + \delta$, es decir, ahorramos a poco.

¿Podemos racionalizar un PMK alto?

Podemos sacar dos posibles conclusiones de un alto PMK:

- 1 O bien necesitamos cambiar los incentivos de ahorro. La reforma del sistema de pensiones es un aspecto que los economistas han defendido.
- 2 O optimizar el consumo a largo plazo por trabajador no es óptimo. Si descontamos el consumo futuro en relación con el consumo actual, la regla de oro no es óptima. Se necesitaría una tasa de descuento anual de más del 4% para explicar los altos rendimientos de capital.

Volviendo a nuestras tres grandes preguntas

- ❶ ¿Por qué somos tan ricos y ellos tan pobres?
 - Diferentes tasas de ahorro, tasas de crecimiento de la población, niveles de educación y niveles de tecnología.
- ❷ ¿Por qué hay milagros de crecimiento?
 - Rápida acumulación de capital físico.
- ❸ ¿Cuáles son los motores del crecimiento económico a largo plazo?
 - Progreso tecnológico.

Referencias

- HERRENDORF, B., R. ROGERSON, AND A. VALENTINYI (2019): "Growth and the kaldor facts," *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*.
- KALDOR, N. (1961): "Capital accumulation and economic growth," in *The theory of capital*, Springer, 177–222.
- SOLOW, R. M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth," *The quarterly journal of economics*, 70, 65–94.